

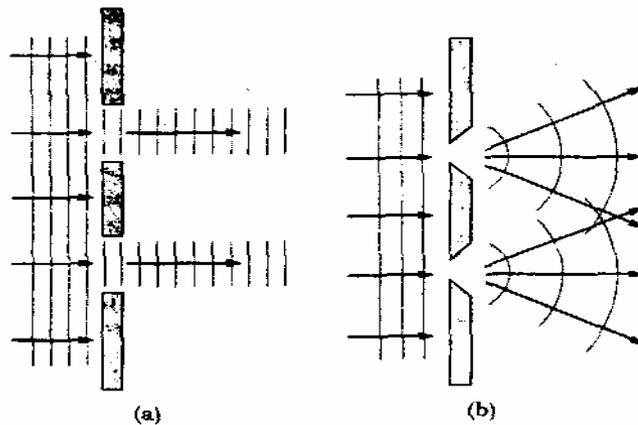
§17-3 單狹縫繞射

① 歷史發展：

1. 楊格雖然以光的干涉實驗，顯示了光的波動性，但欠缺嚴謹的數學理論，未能取得當時學術界的普遍認同。
2. 1818年法國科學院以光的波動說為題，設獎公開徵文，年輕科學家夫瑞奈（Fresnel, 1788 - 1827）以完整的波動理論，解釋光的干涉、繞射、和其他的波動現象，贏得大獎。
3. 按照夫瑞奈的波動理論，以單色的點光源照射不透明的圓盤時，光在圓盤邊緣處產生繞射，會射入圓盤的本影區內。如果點光源置放在圓盤的中心軸上，則從點光源射出的光，經圓盤邊緣至本影中央的光程皆相等，即各光波到達本影中央時應同相，產生完全相長干涉，形成亮點。夫瑞奈的理論經實驗證實後，使光的波動說獲得學術界的一致認同。（課本 P131 圖）——帕松點。

② 認識繞射（課本 P132、133、134、135 圖）

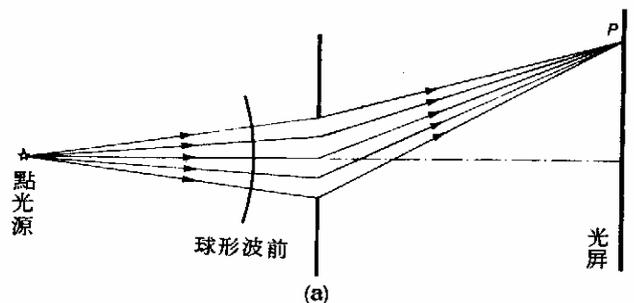
1. 楊格實驗中，光經過狹縫時，如果沒有繞射效應，如下圖左，沒有干涉條紋出現。狹縫夠小時，光會繞射，而形成上一節討論的干涉現象。



2. 用海更士原理來解釋繞射現象，是再合適不過了。
3. 如果狹縫小得可以產生繞射現象，但本身又有相當的寬度，此時，依據海更士原理：光到達狹縫時，狹縫開口處波前上每一點都是子波源，可以向各方向傳播球形波，抵達遠方光屏時，也可以產生干涉條紋。
4. 單狹縫繞射：通常為了處理的方便，把繞射區分成兩種類型：

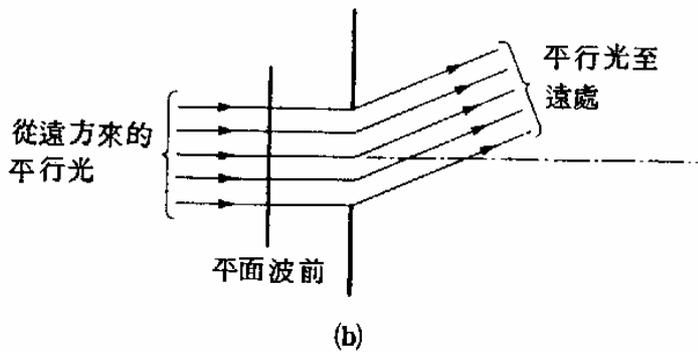
① 夫瑞奈 (Fresnel) 繞射：

光源與狹縫的距離，光屏與狹縫的距離是有限的，也就是說，光源及光屏不是放在無限遠處，所以光線不能視為平行光。如右圖(a)



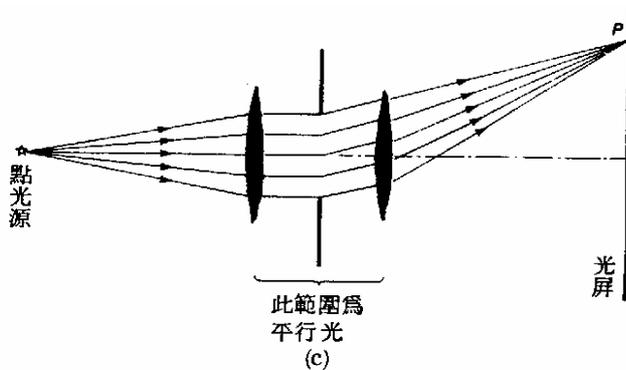
② 夫朗何斐 (Fraunhofer) 繞射：

光源和光屏都在無限遠處，因此，進入狹縫時是平行光(波前為平面波)，也以平行光同時抵光屏上的同一點。如圖(b)



5. 爲什麼要分成這兩種型式？

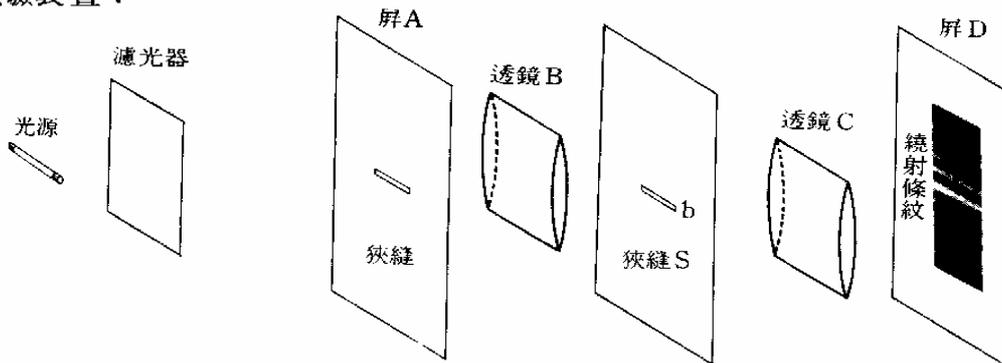
- ①原因很簡單，夫朗何斐繞射數學上的處理容易多了。不要忘記一個原則：初學一個新現象或新理論，都是從容易的先著手。程度夠了，才能做修正或深入討論。
- ②實上，沒有把光屏或光源擺在無窮處的。所以如果用夫朗何斐繞射來討論，方法就是在狹縫前後各加透鏡，以符合夫朗何斐繞射的條件。如圖(c)



3 單狹縫繞射

1. 實驗裝置：

1. 實驗裝置：



2. 裝置說明：

- ①濾光器的作用是使得進來的光是單色光。
如果原來光源就是單色光源，當然就不需要用濾光器。
- ②屏 A 的狹縫很細小，使光通過此狹縫時，成爲點光源(其實是直線形)
- ③透鏡 B 作用是把 A 屏上經狹縫過來的光能成爲平行光，向狹縫 S 前進。
注意的是：屏 A 的位置要在透鏡 B 的焦平面上。(焦平面是過透鏡的焦點而與主軸垂直的平面) —— 如此，由 B 透射出的光將成平行光。

④狹縫 S 就是我們要討論的主角，它的寬度 b 比楊格干涉實驗所用狹縫本身寬度略寬，但比雙狹縫間距 d 小，當然也比屏 A 上的狹縫要寬。

⑤透鏡 C 的作用是把從狹縫 S 繞射出來的光會聚到屏 D 上，以形成干涉條紋。

注意的是：屏 D 的位置在透鏡 C 的焦平面上。通常透鏡 B 與透鏡 C 都比較接近狹縫 S。

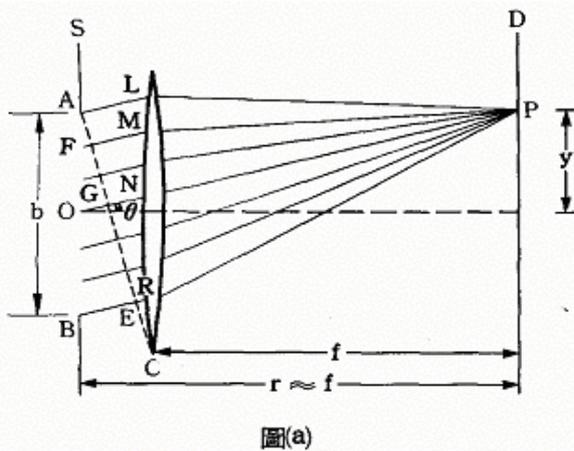
3. 原理：

① 狹縫寬度為 b ，狹縫開口的每一點都是點光源（海更士原理），也都可以發出光線到屏上任意點。

* 光屏位於透鏡的焦平面上，所以照在光屏上同一點的光，在狹縫與透鏡之間必互相平行。

* 光屏上不同的位置，對應著這些方向不同的平行光，方向可以由角度 θ 來表示。

② 出狹縫後的平行光在同一波前上的點，經透鏡 C 之後，會同時抵達光屏上的一點。



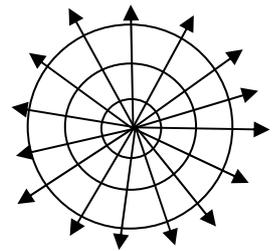
圖(a)

(1)圖(a)中虛線 AE 就是這些平行光的波前，考慮 ALP、FMP、GNP 及 ERP 四條路徑的光線，這四條路徑長度不同，以 ALP 最長，GNP 最短，但是光線走的時間都一樣。???

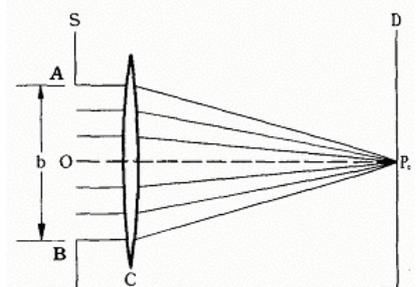
(2)路徑 ONP 雖然最短，但是經過的透鏡部份最多，在透鏡中光速較慢、費時也較多。路徑 ALP 雖然最長，但是在透鏡中的部份最少。考慮了光在透鏡及空氣中總共所需的時間經過進一步計算(超出高中程度)，可得這四條路徑所需時間其實是一樣的。

(3)雖然路徑不同，光卻有相同的行進時間，我們稱為具有相同的光程。

* 根據海更士原理，狹縫開口的每一點都是點光源。所以各位可以想像無數各點波源，在狹縫處排成一列，各自發出圓形波，抵達屏幕上的某位置。



③ 想像一排（由上而下）如右上之圓形波，其向右之波前彼此平行往右，如圖 (b)，此平行波將會聚抵達光屏上的中央點 P_0 上。這些光原本就是同相，又同時抵達 P_0 點，所以在 P_0 點發生完全相長性的干涉， P_0 為亮紋所在，此亮度是干涉圖樣中最亮的，稱為中央亮線，或中央極大。



圖(b)

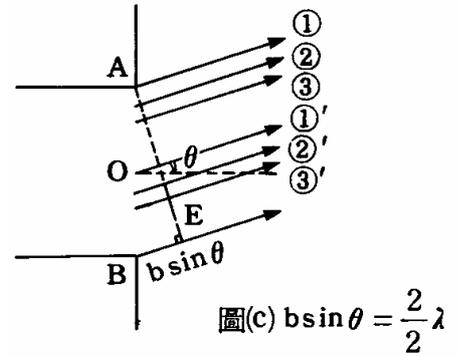
④ 若 P 點不在中央線上，則通過狹縫後的平行光抵 P 點時(圖(a)，會有相差。例如圖 (a) 中，ALP 與 BEP(開口上下兩邊緣的兩光程) 的光程差為： $\Delta\ell = b \sin \theta$ P 點是亮或暗，由 $\Delta\ell$ 決定，其大小與 θ 有關。

補充說明：

1. 想像此排圓形波其向右上(仰角 θ) 之波前，經透鏡折射後，會聚於螢幕 P 點。
2. 既已知平行光同一波前上的點到達螢幕，彼此光程相同，經過透鏡後將在同時相會於同一點，所以以下說明僅著重在平行光，同一波前的前方處理。

⑤ 圖(c)中的光線，恰使 $b \sin \theta = \lambda$ ，由於

$\overline{BE} = b \sin \theta = \lambda$ ，所以把縫寬 b 等分為兩個區間，上半區間與下半區間之對稱位置光線光程差恰為 $\frac{1}{2}\lambda$ ，抵達 P 點時，可完全相消。如圖上編號相等之光線。

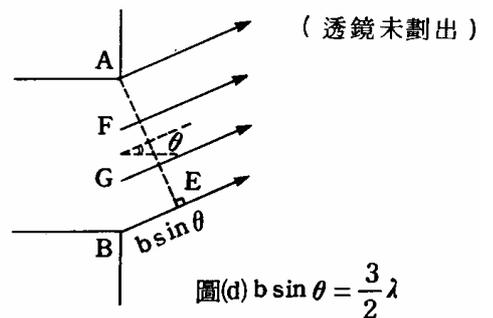


* 實際上是： \overline{AO} 區間的任何一條光線抵達 P 點時，

必存在有一條光線發自 \overline{OB} 區間且光程差為 $\frac{1}{2}\lambda$ 而完全相消。造成的結果是：P 點為暗線，稱為第一極小。

⑥ 圖(d)中的光線，恰使 $b \sin \theta = \frac{3}{2}\lambda$ ，把縫寬 b 等

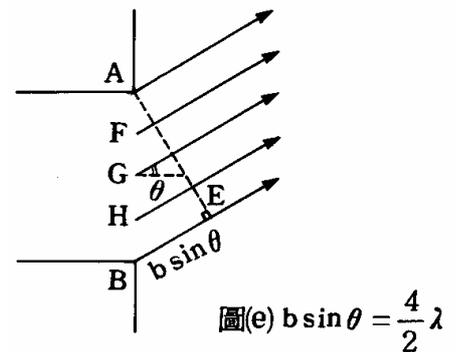
分成三個區間，與上面相同的論點，可知 \overline{AF} 區間與 \overline{FG} 區間的光完全相消，而只剩下 \overline{GB} 區間的光抵達光屏未被抵消，所以光屏上該位置不是暗線，但光線部份相消，所以光的強度大為漸少，稱為次級極大。



⑦ 圖(e)中的光線，恰使 $b \sin \theta = 2\lambda$ ，把縫寬 b 等分為四個區間，用相同的論點，可知這四個區間兩兩完全相消光屏上對應的位置當然為暗線，稱為第二極小。

⑧ 處理的方法都是一樣，看最大光程差 $b \sin \theta$ 可以分出幾個 $\frac{1}{2}\lambda$ ，如果是偶數個，則必兩兩相消而光屏上

形成暗線，如果是奇數個，則兩兩相消後剩下小部份的光到達而形成次級極大。



4. 結論：

$b \sin \theta =$	0	中央亮線的中央位置(中央極大)
	$m \lambda$	$m = 1, 2, 3, \dots$ 暗線位置
	$(n + \frac{1}{2})\lambda$	$n = 1, 2, 3, \dots$ 其他亮帶位置(次級極大)

5. 自導出公式：

(考慮繞射時，單狹逢本身寬度 b 。而干涉時， d 是指雙狹縫間之距離)

畫圖：(類似干涉裝置圖)

問：1. 相鄰兩暗線間隔大小？

2. 中央極大寬度？(與干涉條紋有何不同？)

3. 紅色光與藍色光，何者中央亮帶較寬？

4. 由中央往外，亮帶之亮度變化如何？(與干涉條紋有何不同？)

5. 單狹縫繞射實驗，屏上第一暗紋到狹縫兩端的光程差，為波長的幾倍？

(A)0.5 (B)1 (C)1.5 (D)2 答案： B

6. 單狹縫射之中央亮帶較之第一亮帶：

(A)寬變二倍，亮度大 (B)寬度相同，亮度大 (C)寬度二倍，亮度小

(D)寬度 1/2 倍，亮度二倍 (E)寬度、亮度皆相同 答案： A

6. 干涉與繞射比較：

在干涉時， $d \sin \theta = \lambda$ 為第一亮紋。

亮紋中點 座標位置 $y = \frac{\lambda L}{d}$ 。 暗紋間距(亮紋寬度) $\Delta y = \frac{\lambda L}{d}$

$d \sin \theta = n \lambda$ 為第 n 條亮紋。 亮紋中點 座標位置 $y = n \frac{\lambda L}{d}$ 。

在繞射時， $b \sin \theta = \lambda$ 為第一暗紋。

暗紋座標位置 $y = \frac{\lambda L}{b}$ 。 暗紋間距(亮紋寬度) $\Delta y = \frac{\lambda L}{b}$

$b \sin \theta = n \lambda$ 為第 n 條暗紋。 暗紋 座標位置 $y = n \frac{\lambda L}{b}$ 。

干涉每條條紋，間距、亮度相同。(當然不能離開中央線太遠)

而繞射，中央亮帶寬度是其它亮帶的二倍。

4 討論：

1. 若狹縫寬度遠大於光波長時，則繞射的角度 θ 很小，各亮帶之間緊接在一起，光屏上將僅見到狹縫被照明的幾何形狀。

* 由於可見光的波長約在 400 nm 至 700 nm 之間，遠小於日常生活所見狹縫的寬度，所

以光的繞射現象不易被人察覺。

* 若減小狹縫的寬度，則光屏上中央亮帶的寬度將漸增，兩側的亮帶也隨之變寬。若使狹縫的寬度縮小到接近光的波長，則從狹縫透出的光將可在光屏上照射到相當大的面積。

2. 我們用的只是近似方法，得到的結果只是近似解。到了大學以後，正式的處理要用積分法，最起碼也要用「相量」(Phasor)來處理。得到的結果，暗線位置與我們的結果完全一樣，不同的只是次級極大的位置，而且差異很少。

3. 很多書討論單狹縫繞射時，並沒有畫出透鏡，可不可以？
ANS：我們處理的方法只適用於夫朗何斐繞射，光線要平行入射是平行光到達的，所以嚴格說來，是必須畫出透鏡的。不過，如果光源距狹縫甚遠，以及光屏距狹縫也是甚遠，則透鏡可省略不畫。通常光屏的確距狹縫甚遠，但光源就不是了。

4. 次級極大為亮線(或稱為亮帶)，強度如何？

ANS：n=1 時， $b \sin \theta = \frac{3}{2} \lambda$ 有 $\frac{1}{3}$ 的光沒被抵銷，

n=2 時， $b \sin \theta = \frac{5}{2} \lambda$ 有 $\frac{1}{5}$ 的光沒被抵銷， 等等

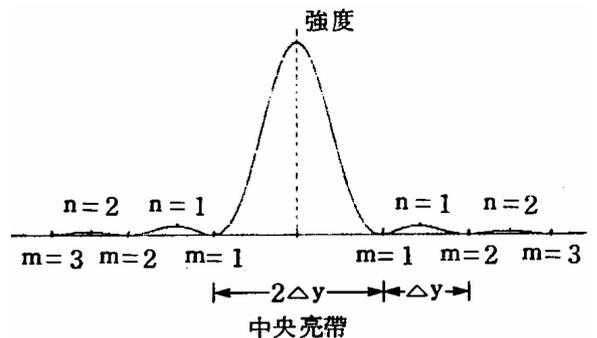
設中央亮線強度為 I_0 ，有人誤會這些次級極大的強度為 $\frac{1}{3} I_0$ 、 $\frac{1}{5} I_0$ 、 $\frac{1}{7} I_0$ 、、、、這是不對的。因為沒有被抵消的光線彼此之間也不是同相。正確的是

n=1 時，強度為 $0.045 I_0$

n=2 時，強度為 $0.016 I_0$

n=3 時，強度為 $0.0083 I_0$

比我們想像的要減弱得更快，可以由強度圖得到驗證。

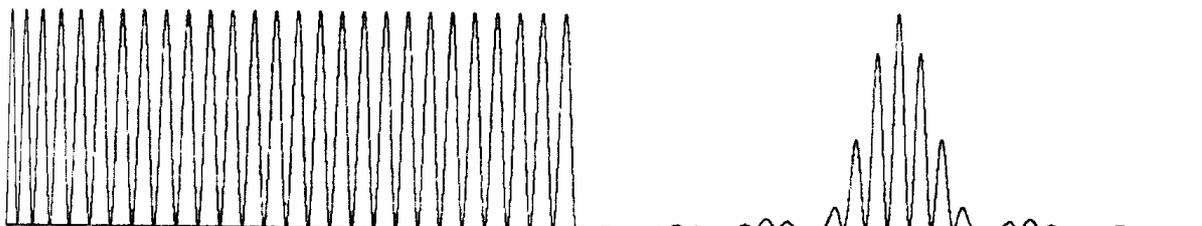


5. 這些明暗相間的條紋，是干涉條紋還是繞射條紋？

ANS：由前面的討論，明暗條紋的產生是光線的相長性或相消性的干涉而形成的，當然是干涉條紋。只是把它說成繞射條紋，我們也不認為錯誤。

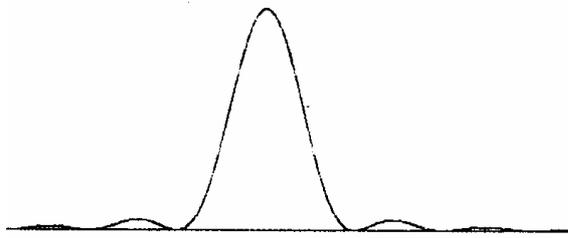
但是要搞清楚：繞射只是光拐彎行進，這是一種方向改變的現象罷了！

6. 在楊格雙狹縫干涉實驗中，如果每一個狹縫的寬度不是極小，考慮繞射條紋的效應，則光屏上的圖樣如何？

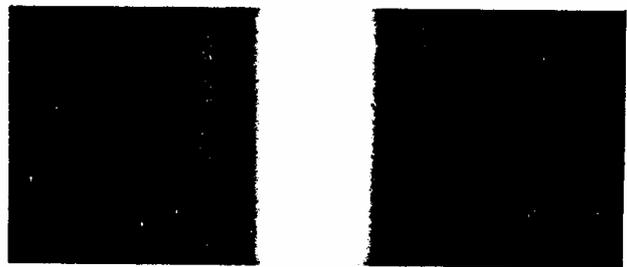


(a)雙狹縫干涉強度圖

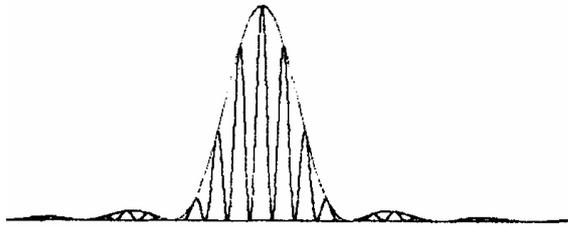
(d)實際上雙狹縫繞射強度強度圖 ($d = 4b$)



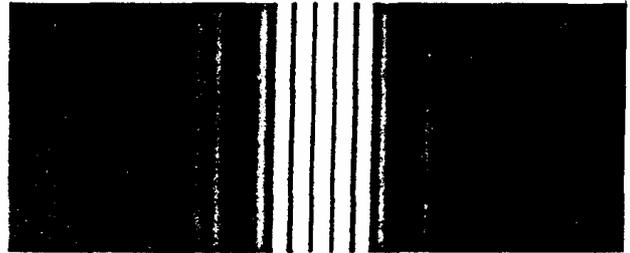
(b)單狹縫繞射強度圖



(e)單狹縫繞射照片



(c)兩種效應都有，上兩圖強度相乘而得



(f)雙狹縫繞射照片 ($d = 4b$)

ANS：(1) 一般我們討論的楊格雙狹縫實驗，是不考慮狹縫寬度的，或者說，狹縫寬度極小，每個雙狹縫的繞射中央亮帶很寬，就在中央亮帶內造成干涉。

(2) 如果考慮每個狹縫本身的寬度造成單狹縫繞射效應，結果如上圖。

7. 如果白色光源作單狹縫繞射實驗，會有彩色的繞射條紋嗎？

ANS：是的。彩色效果與楊格雙狹縫干涉條紋的彩色效果是類似的，中央帶的中間部份是白色的。紫光的波長最短，紫光的 Δy 最小。所以紫光的第一暗線最先出現，表示最先消失的是紫光，實際上紫光範圍很小，對人的眼睛的刺激又不強。通常藍色光比較重要，(藍色光就在紫光的旁邊)，藍色光消失其他色光遠在，故呈現出藍色光的互補色光，即黃色光。可由課本上的彩色照片得到證實。

5 繞射與生活：鑑別率

1. 光源發出的光，經過狹縫或圓孔，如果狹縫甚寬，或圓孔甚大，則繞射現象顯著。
2. 如果狹縫甚窄，或圓孔甚小，則光會有繞射現象，光經此狹縫或小孔後，即會散開而射到比狹縫或小孔的面積為大的範圍。
3. 兩物體所面對的狹縫愈窄，或小孔愈小，光線愈會繞射，光屏上的影像也許會重疊得很利害，以致於不能分清楚為兩個像，此時稱為不可鑑別。

光學儀器系統通常由透鏡、面鏡或稜鏡等等組合而成，每個光學系統必有相當的開口(即孔徑)才能使用。例如照相機的鏡頭有光圈，快門控制，照相時，按鈕按下去，讓光進來。望遠鏡、顯微鏡也有透光孔徑，人的眼睛更有瞳孔。如果光學系統的孔徑太小，物體的光經孔徑繞射太利害，在照相機的底片上，或在人眼睛的網膜上的影像很可能重疊，以致無法分辨是兩個物體。當然，如果原本兩物體的位置太靠近，也會發生影像重疊太過分而無法分辨。

4. 鑑別率就是光學儀器把不同物體分開為個別的影像的能力。光學儀器的鑑別率愈高，表示成像愈清晰。

6 瑞立判據 (雷利準則)

1. 內容：

- ① 兩個點光源 S_1 與 S_2 ，經光學系統所產生的影像會形成繞射圖樣。如果 S_1 的繞射圖樣的中央亮帶中心，恰與 S_2 的繞射圖樣的第一暗線位置重合(即 S_1 的中央線恰落於 S_2 的中央亮帶邊緣。)我們稱此時恰可鑑別為兩個光源。
- ② 如果 S_1 與 S_2 距離太小，或是由於狹縫過窄，小孔的口徑太小，以致 S_1 的中央線落在 S_2 的第一暗線內，(也就是： S_1 的中央線落在 S_2 的中央寬帶內)則稱為不可鑑別。
- ③ 如果 S_1 與 S_2 距離較大，或狹縫較寬、小孔口徑不是很小，以致 S_1 的中央線在 S_2 的中央亮帶外面，則稱為可鑑別。

2. 課本 P136 圖，請觀察何謂可鑑別、恰可鑑別、不可鑑別。

3. 應用：

① 狹縫的鑑別率：

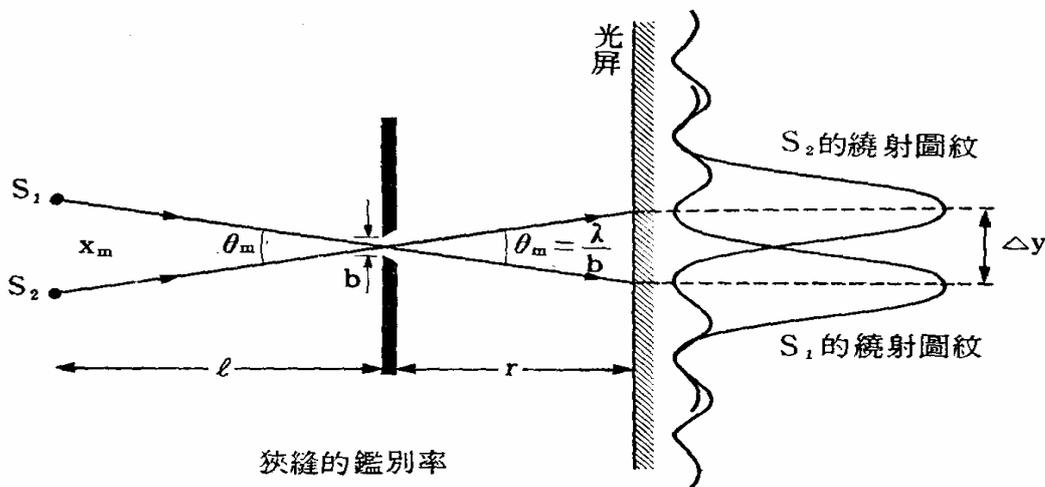
(1) 下圖為恰可鑑別的情形，根據雷利準則知：

S_1 與 S_2 在光屏上繞射圖紋的中央亮帶的中心位置相距距 $\Delta y = \frac{r\lambda}{b}$

(2) Δy 對狹縫張開角度為 θ_m $\theta_m \approx \frac{\Delta y}{r} = \frac{\lambda}{b}$ θ_m 稱為最小鑑別角。

(3) $\theta_m \approx \frac{x_m}{\ell} = \frac{\lambda}{b}$ 恰可鑑別。

(4) 儀器的孔鏡 b 愈大，或使用的光波波長愈短，鑑別率會愈高。



② 圓孔的鑑別率： $\theta_m = 1.22 \frac{\lambda}{b}$ (大學數學方能分析)

4. 如何提高鑑別率：

1. 魚與熊掌不可兼得：以顯微鏡(放大鏡)為例

放大率要大→透鏡焦距要小→透鏡曲率半徑小→透鏡孔徑小→物體影像繞射現象程度大→不同物體的影像易於過分重疊→不易鑑別→鑑別能力差。

2. 如何提高鑑別率：

① λ 小→鑑別能力好

多使用波長短的光來觀察。例如紫色光用在顯微鏡的觀察，效果較好。

② 孔徑大(即 b 大或 d 大) → 鑑別能力好

用望遠鏡觀看天上的星星，我們無法選擇照射光的波長，但可使用大口徑的透鏡(即孔徑 d 大)。天文望遠鏡口徑愈大鑑別率愈高，當然價格也愈高。