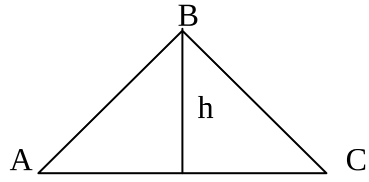
P.27 第 23 題的類似題

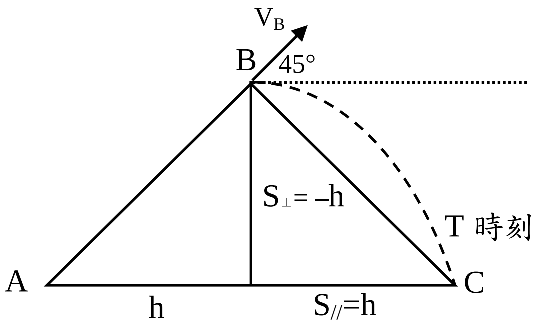
⊙ 兩光滑斜面 ABC 斜角皆為 45 度，一物體自 A 點沿斜面上滑，經 B 後恰落於 C 點，求初速度大小為何？



答案： $\sqrt{\frac{5}{2}gh}$

詳解： (1) 解法 1：標準解法.

i. 畫出物體軌跡的示意圖：由圖上可知物體滑過 B 點後，便以初速 V_B、拋射角為 45 度的斜拋方式落在 C 點上.



ii. 假設 T 時刻落在 C 點上，且已知 $V_{B//} = V_{B\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2}V_B$，$\therefore$ $S_{//} = h = \frac{\sqrt{2}}{2}V_B\,T$，且

$S_\perp = -h = \frac{\sqrt{2}}{2}V_B\,T - \frac{1}{2}gT^2$

兩式合併，故 $\frac{1}{2}gT^2 = 2h$，$\therefore T = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$

$\Rightarrow V_B = \sqrt{2}\frac{h}{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{gh}$

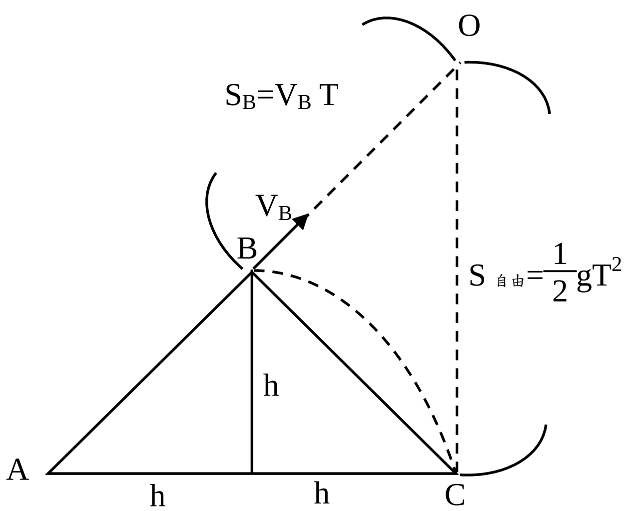
iii. 再由力學能守恆 $U_A+K_A = U_B+K_B$ 或是斜面上的等加速度運動，可得 V_A.

$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}mV_A^2 = mgh + \frac{1}{2}mV_B^2$

$\Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{5}{2}gh}$.

(2) 解法 2：圖解法(快速且簡單的作法).

i. 沿著 V_B 的方向做一延長線，由落下點即 C 點向上做一垂直線，兩線交會於一點 O，假設 T 時刻後落於 C 點，則 $S_B=V_BT$，$S_{自由}= \frac{1}{2}gT^2$.(原因留待最後說明)



ii. 由幾何關係可得：$S_{自由}= 2h = \frac{1}{2}gT^2$,

$S_B=\sqrt{2}h=V_B\,T$，$\therefore T = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$ 代入 S_B

$\Rightarrow V_B = \sqrt{2}\frac{h}{T} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{gh}$

iii. 再由力學能守恆 $U_A+K_A = U_B+K_B$ 或是斜面上的等加速度運動，可得 V_A.

$\Rightarrow 0 + \frac{1}{2}\ mV_A^2 = mgh + \frac{1}{2}\ mV_B^2$

$\Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{5}{2}gh}$.

Ps. 為什麼 $S_B=V_BT$, $S_{自由}= \frac{1}{2}gT^2$ 且兩者連線交會於 O 點？

a. 若 T 時刻後物體 P 斜拋並落在 C 點上，現假設有另一個物體 Q 由 O 點於斜拋開始時自由落下，亦於 T 時刻後與 P 同樣落在 C 點上，即兩者相遇，則 $\overline{OC}$ 必等於 $\frac{1}{2}gT^2$.

b. 現在以 Q 為觀察者來看 P 的軌跡，因為斜拋與自由落下均受到同樣的向下重力加速度 g，故 Q 看 P 的軌跡必為等速度直線運動，而且是沿著 V_B 的方向(如同本卷第 4 題). 既然是 T 時刻後相遇，且觀察者 Q 永遠認為自己靜止，因此 Q 不就認為自己將在 T 時刻後與 P 在 O 點相遇，故 $\overline{OB}$ 必等於 V_BT.

c. 綜合以上說明，可確定 $S_B=V_BT$, $S_{自由}= \frac{1}{2}gT^2$ 且兩者連線交會於 O 點.